

ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

УДК 664:634.18

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЦЕНТРИРОВАНИЯ ФРУКТОВОГО СОКА В МНОГОКОРПУСНОЙ ВЫПАРНОЙ УСТАНОВКЕ

О. Н. Пчелинцева, Д. И. Фролов

В представленной работе рассмотрен процесс концентрирования фруктовых соков методом выпаривания. Для учета переходных процессов совместно приведены уравнения выпарного аппарата и конденсатора. Получена система дифференциальных уравнений, описывающих статические и динамические характеристики однокорпусного выпарного аппарата и учтена их связь в многокорпусной выпарной установке.

Ключевые слова: выпаривание, концентрирование, сок, многокорпусная выпарная установка.

Введение

В индустрии получения концентрированных соков выпаривание как правило проводят при высоких температурах. При выпаривании твердых веществ в ряде пищевых производств добиваются насыщения раствора, при последующем удалении растворителя из этого раствора, вследствие чего выделяется растворенное вещество – происходит кристаллизация.

Выпаривание используют для увеличения концентрации разбавленных растворов или же извлечения из них растворенного вещества при помощи кристаллизации.

Процедуру выпаривания обширно применяют в сахарной и консервной промышленности при концентрировании сахарных и томатных соков, молока и др. В пищевой технологии выпаривают обычно водные растворы например, фруктовые соки. Для сохранения естественных качеств соков выпаривание проводят при низких температурах и непродолжительное время.

Отрицательное действие теплоты на продукт, которому предстоит концентрация, отражается в первую очередь на его цвете. Потемнение является промежуточным продуктом – оксиметилфурфуролом, получающимся в присутствии сахаров и кислоты, и его последующими преобразованиями до темных продуктов испарения. В связи с этим количество полученного оксиметилфурфурола обычно бывает одним из показателей качества концентратов. Большое количество его означает о слишком большой обработке его теплом [1].

Для соков принято считать количество воды, которое должно быть выпарено для выделения ароматических веществ плодов (в % к объему сока). Например для яблочного сока это 15–20%, для грушевого, черносмородного 45–50%, абрикосового,

персикового 65–70%. Хотя обычно из яблочного сока уходит 15% воды, из иных соков 30%.

Выделенные с водяным паром ароматические вещества концентрируются в ректификационных колоннах. В 100-м концентрате содержатся около 1% ароматических веществ, а остальные 99% составляют вода и этиловый спирт. Чем больше спирта содержится в соке, тем больше его концентрация в ароматическом концентрате, поэтому в стандарте разных стран количество этилового спирта в концентратах ароматических веществ ограничивают в рамках от 5 до 20% в зависимости от вида фруктового сока.

Процесс выпаривания проводят в выпарных аппаратах непрерывно или периодически. Аппараты периодического действия, обычно используют в малых производствах.

Для выпаривания соков используют различные разновидности выпарных аппаратов. Выбор вида выпарного аппарата зависит в первую очередь от вида сока и его основных свойств.

При выпаривании осветленных соков и прочих не тягучих жидкостей лучшие результаты получены при применении тонкопленочных выпарных аппаратов, в них получают высочайшую скорость перемещения выпариваемой жидкости. Концентрируемая жидкость проходит в них в виде тонкой пленки снизу вверх либо сверху вниз по поверхности по которой проходит тепло. Растущая при этом скорость движения пара способствует преодолению увеличивающейся вязкости продукта.

Для выпаривания осветленных соков применяют два вида пленочных выпарных аппаратов – трубчатые и пластинчатые. Выпарные аппараты бывают одноступенчатыми, в которых греющий пар применяется один раз и расход его составляет 1,1 кг/кг испаренной воды, и многоступенчатыми, в которых используется теплота вторичного, сокового пара.

Многоступенчатые аппараты содержат разное число ступеней, и соответственно имеют разный расход в них греющего пара. В двухступенчатых выпарных установках расход пара 0,7 кг/кг, в трехступенчатых – 0,5 кг/кг и т.д. В последние годы большое распространение получили четырехступенчатые выпарные аппараты, расход пара в которых составляет 0,22 кг/кг испаренной влаги [1].

Целью работы являлось получение математической модели работы многокорпусной выпарной установки для выделения фруктового сока.

Объекты и методы исследований

Для получения модели для определения динамических свойств выпарного аппарата произведём его разделение на греющую камеру, поверхность нагрева и парожидкостное пространство и рассмотрим динамические свойства этих элементов. Поскольку переходные процессы происходят во времени, то наиболее удобной формой записи будут дифференциальные уравнения. Запишем уравнение материального баланса для греющей камеры в дифференциальной форме:

Для получения модели для определения динамических свойств выпарного аппарата произведём его разделение на греющую камеру, поверхность нагрева и парожидкостное пространство и рассмотрим динамические свойства этих элементов. Поскольку переходные процессы происходят во времени, то наиболее удобной формой записи будут дифференциальные уравнения. Запишем уравнение материального баланса для греющей камеры в дифференциальной форме:

$$\frac{d(G_H + G_K)}{d\tau} = D_{II} - D_K - D_H \quad (1)$$

где G_H, G_K – масса пара и конденсата в греющей камере;

D_{II}, D_K, D_H – расходы греющего пара, конденсата и пара, расходуемого на отвод неконденсирующихся газов.

Внутренняя энергия и выпарной установки приближенно определяется уравнением [2]:

$$u = M_{II} u_{II} + M_K c_K t_K + M_c c_c t_c + M_H c_H t_H \quad (2)$$

где M_{II}, M_c, M_H – масса пара, стенок и изоляции;

u_{II} – внутренняя энергия пара;

$c_K, c_c, c_H, t_K, t_c, t_H$ – соответственно, теплоемкость и температуры конденсата, стенок и изоляции.

Считают, что энтальпия греющего пара и пара, расходуемого на отвод неконденсирующихся газов, примерно одинаковы $i_{II} = t_H$, а изменение вну-

тренней энергии определяется только подводом и отводом теплоты. Продифференцировав это уравнение, получим приближенную зависимость изменения основных характеристик аппарата во времени

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{DM_{II} u_{II}}{d\tau} + \frac{dM_K c_K t_K}{d\tau} + \\ &+ M_c c_c \frac{dt_c}{d\tau} + M_H c_H \frac{dt_H}{d\tau} = \quad (3) \\ &= (D - D_H) i_{II} - D_K i_K - Q_{II} - Q_{пот} \end{aligned}$$

Выражая массы пара и конденсата через их объемы и плотности и учитывая, что внутренняя энергия, плотность и теплоемкость пара и воды являются функциями температуры, получаем приближенное дифференциальное уравнение для греющей камеры, разрешенное относительно температуры греющего пара

$$a_1 \frac{dt_{II}}{d\tau} = -a_2 t_{II} + a_3 t_c + a_4 (D - D_H) + a_5 \quad (4)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – постоянные, определяемые соотношениями величин, характеризующих режимы работы конкретного аппарата.

Например,

$$a_2 = a_3 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}}; \quad a_4 = i_H - i_K;$$

$$a_5 = D_H \quad (5)$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от греющего пара к стенкам труб;

F_1 – поверхность конденсации;

t_{II}, t_c – температура греющего пара и поверхности нагрева (стенки);

δ_c, λ_c – толщина и коэффициент теплопроводности стенки.

Уравнение (4) описывает закономерность изменения температуры греющего пара во времени. Простым пересчетом получим уравнение для установления закономерностей изменения давления греющего пара.

Поскольку уравнение (4) в правой части содержит еще одну переменную — температуру поверхности нагрева t_c , то необходимо получить закономерность ее изменения во времени. Для этого используем уравнение энергетического баланса

$$M_c c_c \frac{dt_c}{d\tau} = Q_1 - Q_2 \quad (6)$$

Количество теплоты, подводимой к трубам греющей камеры, определяется уравнением

$$Q_1 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}} (t_n - t_c) \quad (7)$$

а количество теплоты, передаваемой от труб греющей камеры к нагреваемой жидкости,— уравнением

$$Q_2 = \frac{F_2}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c} + \frac{\delta_H}{2\lambda_H}} (t_c - t_{ж}) \quad (8)$$

где F_1, F_2 – внешняя и внутренняя поверхности труб;

$t_{ж}$ – температура кипящей жидкости;

α_1, α_2 – коэффициенты внутренней и внешней теплоотдачи;

δ_c, δ_H – толщина стенок металла и накипи;

λ_c, λ_H – коэффициенты теплопроводности для стенок металла и накипи.

Преобразовав уравнение (6) и разрешив его относительно основной переменной с учетом (7) и (8), получим дифференциальное уравнение, описывающее закономерность изменения температуры поверхности нагрева во времени

$$c_1 \frac{dt_c}{d\tau} = -c_2 t_n + c_3 t_{ж} + c_4 t \quad (9)$$

где $c_1 = c_c M_c$; $c_2 = c_3 + c_4$;

$$c_3 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}}; c_4 = \frac{F_2}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_H}{2\lambda_H} + \frac{\delta}{2\lambda}}$$

Парожидкостное пространство выпарного аппарата можно рассматривать как три последовательно сосредоточенные емкости: кипящая жидкость, пар под зеркалом испарения и пространство вторичного пара. Уравнение материального баланса для трех емкостей в дифференциальной форме запишем в следующем виде:

$$\frac{d(M_{ж} + M'_n + M''_n)}{d\tau} = S_H - S_K - W \quad (10)$$

где $M_{ж}, M'_n, M''_n$ – массы жидкости в аппарате, пара под и над зеркалом испарения.

Учитывая, что температура вторичного пара равна температуре кипения жидкости ($t_{ж} \approx t$), а изменение внутренней энергии и плотности пара является функцией температуры (давления), пренебрегая массой пара по сравнению с массой жидкости и произведя ряд алгебраических преобразований, получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры кипящей жидкости

$$d_1 \frac{dt_{ж}}{d\tau} = -d_2 t_{ж} + d_3 t_c - d_4 W + d_5 \quad (11)$$

где $d_1 = \rho_{ж} c_{ж} V_{ж} + c_c \sum M_c$; $d_2 = c_4 + S_H c_{ж}$

$$d_3 = d_4 = i_n; d_5 = S_H c_H t_H - Q_{пот}$$

Объем жидкости в аппарате определяется пьезометрическим уровнем

$$V_{ж} = V_{ж0} + \eta h \quad (12)$$

где $V_{ж0}$ – объем жидкости, ограниченный плоскостью, от которой отсчитывается уровень;

η – площадь поперечного сечения аппарата.

Изменение уровня жидкости в аппарате определится уравнением

$$\frac{d(V_{ж} \rho_{ж})}{d\tau} = e \frac{dh}{d\tau} = S_H - S_K - W \quad (13)$$

где $e = \rho_{ж} \eta$.

Для обеспечения постоянства количества жидкой фазы и температурного режима в аппарате необходимо соблюдать два условия [3]

$$\Delta Q = 0 \text{ и } S_H - S_K - W = 0$$

Уравнение для концентрации раствора в аппарате получаем из материального баланса сухих веществ в дифференциальной форме

$$\frac{d}{d\tau} (M_{ж} b + M_n \varepsilon) = b_H S_H + b_K S_K - W \varepsilon \quad (14)$$

где b_H, b_K, b – концентрации на входе, выходе и в паровом пространстве (в долях единицы);

ε – доля сухих веществ во вторичном паре.

Выразив массу жидкости $M_{ж} = V_{ж} \rho_{ж}$ и считая, что унос жидкости паром незначителен $\varepsilon = 0$, а концентрация — сосредоточенный параметр, продифференцировав уравнение, получим

$$V_{ж} \rho_{ж} \frac{db}{d\tau} + \rho_{ж} b \frac{dV_{ж}}{d\tau} = b_H S_H - b_K S_K$$

$$V_{ж} = V_{ж0} + \eta h (M_{ж} + \eta \rho_{ж} h) \frac{db}{d\tau} +$$

$$+ \eta \rho_{ж} b \frac{dh}{d\tau} = b_H S_H + b_K S_K$$

Подставив последнее равенство в уравнение (13), получим

$$f \frac{db}{d\tau} = b_H S_H - b(S_K - W) \quad (15)$$

где $f = M_{ж0} + \eta \rho_{ж} h$

Результаты и их обсуждение

В результате получена система дифференциальных уравнений, описывающих установившиеся и переходные процессы в одноступенчатом выпарном аппарате

$$\begin{cases} a_1 \frac{dt_n}{d\tau} = -a_2 t_n + a_3 t_c + a_4(D - D_H) + a_5; \\ c_1 \frac{dt_c}{d\tau} = -c_2 t_c + c_3 t_{ж} + c_4 t; \\ d_1 \frac{dt_{ж}}{d\tau} = -d_2 t_{ж} + d_3 t_c - d_4 W + d_5; \\ f \frac{db}{d\tau} = b_H S_H - b(S_K - W); \\ e \frac{dh}{d\tau} = S_H - S_K - W. \end{cases} \quad (16)$$

Эта система уравнений устанавливает связи между температурами пара t_n , стенок t_c , кипящей жидкости $t_{ж}$, ее концентрацией b и уровнем h при различных возмущающих и упрощающих воздействиях (подача пара в греющую камеру, расход пара на отвод неконденсирующихся газов, подвод и отвод выпариваемой жидкости, начальная концентрация, образование накипи и пр.).

Для определения расхода вторичного пара W необходимо систему уравнений (16) одного корпуса рассматривать совместно с уравнениями корпуса, в который направляется вторичный пар [4]. При всем этом вероятны следующие случаи.

1. Если в выпарном аппарате температура кипящего сока поддерживается неизменной ($t_{ж} = const$), например, при кипении при атмосферном давлении, то уравнение (11) преобразуется в алгебраическое и служит для определения количества вторичного пара

$$W \frac{d_3}{d_4} t_c - \frac{d_2}{d_4} t_{ж} + \frac{d_5}{d_4}$$

2. При работе выпарного аппарата совместно с конденсатором температура (давление) в котором зависит от расхода вторичного пара, при расчете и моделировании переходных процессов необходимо рассматривать совместно уравнения выпарного аппарата и конденсатора. Пусть переходный процесс в конденсаторе описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$z_1 \frac{dt_{конд}}{d\tau} = z_2 t_{конд} + z_3 W - z_4 G_B + z_5$$

где $t_{конд}$ – температура пара в конденсаторе;
 G_B – расход охлаждающей воды;
 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 – постоянные величины, определяемые режимом работы и конструктивными параметрами конденсатора.

Не учитывая гидравлические сопротивления паропровода, соединяющего выпарной аппарат и конденсатор и считая, что $t_{ж} = t_{конд} + \Delta$ запишем

$$\frac{dt_{конд}}{d\tau} = \frac{dt_{ж}}{d\tau} \quad (17)$$

где Δ — полная депрессия.

Рассматривая совместно последних три уравнения, получаем дифференциальное уравнение динамики выпарного аппарата, работающего совместно с конденсатором

$$d_1^0 \frac{dt_{ж}}{d\tau} = -d_2^0 t_{ж} + d_3^0 t_c - d_4^0 G_B + d_5^0 \quad (18)$$

где $d_1^0 = d_1 + d_4 \frac{z_1}{z_3}$; $d_2^0 = d_2 + d_4 \frac{z_2}{z_3}$

$$d_4^0 = d_4 \frac{z_4}{z_3}; \quad d_5^0 = d_5 + d_4 \left(\frac{z_5}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \Delta \right)$$

3. При работе выпарного аппарата с другими корпусами многокорпусной выпарной установки (МВУ) расход вторичного пара W определяют на основе совместного рассмотрения уравнений для парожидкостного пространства i -го аппарата и греющей камеры $(i + 1)$ -го аппарата.

Для замыкания системы уравнений, описывающих переходные процессы в отдельных корпусах МВУ, необходимо добавить уравнения, связывающие параметры смежных аппаратов (уравнения связи). В качестве таких уравнений для установок с пароотбором можно использовать уравнения материального баланса

$$\begin{aligned} D_2 &= W_1 - E_1; \quad D_3 = W_2 - E_2; \\ \dots; \quad D_i &= W_{i-1} - E_{i-1} \end{aligned} \quad (19)$$

а для установок без пароотбора

$$D_2 = W_1; \quad D_3 = W_2; \quad \dots; \quad D_i = W_{i-1}$$

где D_i, W_i, E_i – количество греющего, вторичного и экстрапара i -го корпуса.

При этом количество недостающих уравнений составит

$$2n - 1 - (n - 1) = n$$

Недостающие уравнения получим на основе совместного рассмотрения уравнений смежных корпусов МВУ.

Систему дифференциальных уравнений (16), описывающих статические и динамические харак-

теристики однокорпусного выпарного аппарата, преобразовывают к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \frac{dt_n}{d\tau} + t_n = t_c + a_4(D - D_H) + a'_5; \\ T_2 \frac{dt_c}{d\tau} + t_c = c'_3 t_n + c'_4 t_{ж}; \\ T_3 \frac{dt_{ж}}{d\tau} + t_{ж} = d'_3 t_c - d'_4 W + d'_5; \\ T_4 \frac{db}{d\tau} + b = f_2 b_H; \\ T_5 \frac{dh}{d\tau} = S_H - S_K - W. \end{array} \right. \quad (20)$$

где $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$; $T_2 = \frac{c_1}{c_2}$; $T_3 = \frac{d_1}{d_3}$; $T_4 = \frac{f_1}{S_H - W}$

$$T_5 = e \quad ; \quad a'_4 = \frac{a_1}{a_2} \quad ; \quad a_5 = \frac{a_5}{a_2} \quad ; \quad c'_3 = \frac{c_3}{c_2} \quad ;$$

$$c'_4 = \frac{c_4}{c_2} \quad ; \quad d'_3 = \frac{d_3}{d_2} \quad ; \quad d'_4 = \frac{d_4}{d_2} \quad ; \quad d'_5 = \frac{d_5}{d_2} \quad ;$$

$$f_2 = \frac{S_H}{S_H - W}$$

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 – постоянные времени выпарного аппарата соответственно по температурам греющего пара, поверхности нагрева, кипящей жидкости, а также по изменению концентрации и гидростатическому изменению уровня кипящей жидкости. [3]

Выводы

Особенностью математической модели однокорпусного выпарного аппарата, работающего совместно с конденсатором, является замена третьего уравнения в системе (16) уравнением (18).

Для МВУ первый и второй корпус описываются системой уравнений (16) и связи между ними устанавливаются уравнениями (19).

Из-за небольших отклонений от равновесного состояния, при которых влияние величины концентрации и уровня на теплообмен незначительно, уравнения для концентраций и уровня рассматриваются отдельно от уравнений для температурного режима.

Список литературы

1. Кавецкий, Г.Д. Процессы и аппараты пищевой технологии / Г.Д. Кавецкий, В.П. Касьяненко. – М.: КолосС, 2008. – 591с.: ил.
2. Остапчук, Н.В. Основы математического моделирования процессов пищевых производств: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Высш. шк., – 2001. – 367 с.
3. Qi Ruan, Hao Jiang, Meiling Nian, Zuoyi Yan Mathematical modeling and simulation of countercurrent multiple effect evaporation for fruit juice concentration // Journal of Food Engineering: Volume 146. – Pages 243–251.
4. Deepak Kumar, Vivek Kumar, V.P. Singh, Modeling and dynamic simulation of mixed feed multi-effect evaporators in paper industry // Applied Mathematical Modelling: Volume 37, Issues 1–2. – Pages 384–397.

MATHEMATICAL MODELING OF CONCENTRATING THE FRUIT JUICE BY EVAPORATION

O. N. Pchelintseva, D. I. Frolov

In the present paper we consider the process of concentrating fruit juices by evaporation. To account for the transient processes jointly presented equation evaporator and condenser. A system of differential equations describing the static and dynamic characteristics of single hull evaporator and taken into account their link in multihull evaporator unit.

Keywords: evaporation, concentration, juice, multihull evaporating unit.

References

1. Kavetsky, G. D. Processes and devices of food technology / G. D. Kavetsky, V. P. Kasyanenko. – M. Colossi, 2008. – 591s.: II.
2. Ostapchuk, N. V. Fundamentals of mathematical modeling of processes of food production: Proc. allowance. – 2nd ed., Rev. and add. – K. : Vyssh. shk. – 2001. – 367 p.
3. Qi Ruan, Hao Jiang, Meiling Nian, Zuoyi Yan Mathematical modeling and simulation of countercurrent multiple effect evaporation for fruit juice concentration // Journal of Food Engineering: Volume 146. – Pages 243–251.
4. Deepak Kumar, Vivek Kumar, V. P. Singh, Modeling and dynamic simulation of mixed feed multi-effect evaporators in paper industry // Applied Mathematical Modelling: Volume 37, Issues 1–2. – Pages 384–397.