

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СУШКИ ЯБЛОК

О. Н. Пчелинцева

В представленной работе с помощью дифференциальных уравнений проведено математическое моделирование кинетики процесса сушки яблок. Полученные зависимости позволяют в дальнейшем при использовании в специализированных вычислительных устройствах многократно решать задачи расчета кинетики сушки при изменении исходной влажности продукта.

Ключевые слова: моделирование, яблоки, сушка.

Введение

Сушеные овощи, картофель и фрукты представляют собой незаменимые полуфабрикаты для пищевых концентратов, консервной, рыбной и мясомолочной промышленности. Для снабжения различных экспедиций, космонавтов, туристов и др. их так же используют. Сушеные овощи, картофель и фрукты находят широкое применение в общественном и индивидуальном питании.

Достоинства сушки как метода консервирования общепризнаны – малая масса, недефицитная тара для фасовки, хорошая транспортабельность, возможность длительного хранения и перевозок продукции без применения холода и т.д. [1].

Сушка овощей и фруктов известна со времен глубокой древности. В России в качестве промысла сушка овощей стала распространяться в селах в конце XIX – начале XX столетий. До революции овощи сушили на небольших полукустарных заводах. На сегодняшний день сушка фруктов широко распространена. Самыми распространенными продуктами являются изюм, финики, чернослив, инжир, абрикосы, персики, яблоки и груши. Они упоминаются как «обычные» или «традиционные», которые были высушены на солнце или в специальных аэродинамических трубах. Многие виды плодов и ягод, таких как клюква, голубика, вишня, клубника и манго пропитывают подсластителями (например, сиропом из сахарозы) перед сушкой. Некоторые продукты продаются как сухофрукты, например, бананы, папайи, киви и ананасы.

Процесс сушки обусловлен подводом теплоты к высушиваемому продукту, благодаря которому происходит испарение влаги. В качестве сушильного агента применяют воздух, перегретый пар и топочные газы, которые насыщаются испаряемой влагой из высушиваемого материала.

Сушку пищевых продуктов производят в барабанных, ленточных, шахтных, распылительных, коридорных, камерных сушках, в установках с падающим и кипящим слоями и пр. Эти аппараты отличаются конструктивными параметрами, направлением сушильного агента и высушиваемого продукта, давлением в сушильной камере [5].

Целью работы является моделирование про-

цесса кинетики сушки яблок при изменении исходной влажности продукта.

Объекты и методы исследований

Объектом исследования являются яблоки. Каждый сорт яблок имеет свои характерные особенности и различный химический состав. Все зависит от происхождения, условий произрастания, степени зрелости плодов. Все это определяет пищевые достоинства, вкус и использование. Для сушки применяют только яблоки с белым плотным плодовым телом. Для сушки пригодные зрелые яблоки с большим количеством ароматических и вкусовых веществ, когда их плодовое тело еще не размякло. Кружочки и частицы режутся из яблок диаметром более 50 мм. Для изготовления более измельченного материала могут быть использованы мелкие яблоки, однако переработка плодов диаметром менее 30 мм не целесообразно через увеличение отходов.

Методы исследования основываются на решении систем дифференциальных уравнений, описывающих тепло- и влагоперенос во влажных телах [2–4].

Результаты и их обсуждение

Для анализа процесса сушки рассмотрим основные дифференциальные уравнения описывающие тепло- и влагоперенос во влажных телах:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = k_{11} \nabla^2 u + k_{12} \nabla^2 t + k_{13} \nabla^2 P \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = k_{21} \nabla^2 u + k_{22} \nabla^2 t + k_{23} \nabla^2 P \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = k_{31} \nabla^2 u + k_{32} \nabla^2 t + k_{33} \nabla^2 P \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты k_{ij} определяются сочетанием термодинамических и теплофизических характеристик влажного тела:

$$k_{11} = a_m; k_{12} = a_{m\delta}; k_{13} = \frac{k_p}{\rho_0}; k_{21} = \frac{2\varepsilon}{c} a_m;$$

$$k_{22} = a + \frac{er}{c} a_m \delta; k_{23} = er = \frac{a_m}{c} \delta_p; k_{31} = \frac{-\varepsilon a_m}{c_r};$$

$$k_{32} = \frac{-\varepsilon a_m}{c_p} \delta; k_{33} = (a_p \frac{-\varepsilon a_m}{c_p} \delta_p);$$

Здесь дополнительно введены следующие обозначения:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа};$$

$a = \lambda / c_p$ – коэффициент

температуропроводности;

a_m – коэффициент диффузии влаги;

δ – относительный коэффициент термодиффузии влаги;

δ_p – термоградиентный коэффициент;

e – критерий фазового превращения;

r – удельная теплота фазового превращения;

k_p – коэффициент фильтрационного переноса влаги;

c – приведенная удельная теплоемкость материала;

c_p – коэффициент емкости влажного воздуха в пористом теле;

x, y, z – координаты;

ρ_0 – плотность сухого скелета влажного тела.

Для одномерных задач при отсутствии градиента общего давления система уравнения упрощается

$$c \rho_t \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \varepsilon r \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial u}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t}{\partial x} \right).$$

Все теплофизические и термодинамические характеристики $a_m, \delta, \lambda, c, r, e$ являются функциями температуры t и влагосодержания.

В приведенных уравнениях влагосодержание u можно заменить потенциалом влагопереноса $du = c_t u$ тогда соответствующие термодинамические и теплофизические характеристики нужно поделить на величину массоемкости.

Для решения системы приведенных уравнений необходимо знать распределение температур и влагосодержания внутри тела в начальный момент времени (начальные условия), геометрическую форму тела и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела (граничные условия). Совокупность начальных и граничных условий составляет в простейшем случае краевые условия.

Граничные условия могут быть заданы че-

тырьмя способами. Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры на поверхности тела t_n во времени, т. е. $t_n(\tau) = f(\tau)$ (задача Дирихле), второго рода - в задании плотности теплового потока (производная от температуры) для каждой точки поверхности тела как функции времени $q_n(\tau) = f(\tau)$ (задача Неймана), третьего рода - в задании температуры окружающей среды и закона теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой (смешанные условия)

$$q_i = \alpha [t_0(\tau) - t_c(\tau)] \quad (3)$$

где t_c – температура окружающей среды.

Граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену тела с окружающей средой по закону теплопроводности или случаю теплообмена соприкасающихся твердых тел, когда их температуры поверхностей одинаковы (идеальный тепловой контакт).

Распределение температуры внутри тела в начальный момент времени задается начальным условием

$$t = (x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

При равномерном распределении температуры начальное условие принимает вид

$$t = (x, y, z, 0) = t_0 = const.$$

В соответствии с теоремой о единственности решения, если некоторая функция $f(x, y, z, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, начальным и граничным условиям, то она является единственным решением задачи.

Наличие заданных краевых условий позволяет в простейших случаях получить аналитические решения прямой задачи теплопроводности, т. е. найти функцию

$$t_0 = f(x, y, z, \tau)$$

Аналогично граничным условиям теплообмена взаимодействие поверхности тела с окружающей средой при массообмене также может быть описано граничными условиями четырех родов.

Граничные условия первого рода соответствуют случаю, когда потенциал диффузионного массопереноса на поверхности тела равен потенциалу массопереноса в окружающей среде; второго рода - случаю массообмена при сушке влажных тел, когда в первом периоде интенсивность сушки постоянна, а во втором уменьшается. Следовательно, в граничных условиях задается плотность потока массы вещества как функция времени $g_m = f(\tau)$. В частном случае $g_m = const$.

Граничные условия третьего рода аналогичны граничным условиям теплообмена, а четвертого рода характеризуют молекулярный теплообмен между двумя средами. В общем случае граничные условия для одномерного потока запишем:

$$\begin{cases} -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_n + q_n(\tau) - r(1 - \varepsilon)q_n(\tau) = 0 \\ a_m \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n + a_m \rho_0 \delta \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) + q_m(\tau) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

где q_n, q_m – удельный поток соответственно тепла и влаги на поверхности.

Начальные условия для одномерного потока при $\tau = 0$ имеют вид

$$m = f(x)$$

$$t_i = f_1(x)$$

Система уравнений (1) и граничные условия составляют математическое описание тепло- и массообмена во влажных телах и в бинарной парогазовой среде (сушильный агент) при конвективной диффузии в жидкостях и пр. Для подвижных сред в уравнения необходимо ввести член, содержащий скорость движения среды. Форма записи граничных условий зависит от вида тепло- и массообмена, геометрической формы среды и выбранной системы координат.

При построении математических моделей нагрева, сушки и охлаждения материала приведенные математические зависимости упрощают введением различных допущений, которые хотя и снижают точность математических моделей, но позволяют представить сложные процессы сравнительно простыми и доступными для решения методами, и средствами.

Таковыми допущениями могут быть замена сложных многомерных тел и пространств одномерными: разделение пространств и тел сложной формы на простые элементы; неизменность теплофизических и термодинамических характеристик в рассматриваемых диапазонах изменения температур и влагосодержаний; исключение из уравнений членов, незначительно влияющих на конечные результаты, преобразование системы координат для упрощения формы записи.

В связи со сложностью и недостаточной точностью такого рода описаний, а также отсутствием либо сложностью метода решения систем уравнений чаще всего используют более простые формы описания процессов сушки.

Кинетику сушки представляют различными формами кривой сушки. Наиболее распространенной формой является уравнение А. В. Лыкова[2–4]:

$$W = W_p + (W_H - W_p) \cdot e^{(-k\tau)} \quad (5)$$

где W, W_p, W_H – текущая, равновесная и начальная влажности материала;

k – коэффициент сушки, являющийся функцией температуры и влажности среды, $k = f(t, \varphi)$.

В некоторых случаях рационально применять такую форму записи:

$$W = W_p - (W_H - W_p) e^{(-a + \frac{b}{2}\tau) \tau}$$

где a, b – коэффициенты, характеризующие связь влаги с материалом.

Равновесная влажность для данного материала является функцией температуры и относительной влажности сушильного агента $W_p = f(t, \varphi)$. Поэ-

тому, используя обозначения $W_{y.n.} = W_H - W_p$ и

$W_y = W - W_p$ (удаленная влага), кинетику сушки представляют уравнением вида

$$W_y = W_{y.n.} e^{-\{k(t, \varphi)(a + \frac{b}{2}\tau) \tau\}} \quad (6)$$

В этом уравнении $k(t, \varphi)$ характеризует режим, a – связь влаги с материалом.

Обе эти характеристики устанавливают экспериментально, считая, что описания кривых сушки известны. При известных описаниях кинетических закономерностей и численных значениях, постоянных для исследования, можно использовать аналоговые и цифровые вычислительные машины.

Представив уравнение (5) или (6) в дифференциальной форме и составив структурную схему набора этого дифференциального уравнения на аналоговой вычислительной машине, можно получить модель для исследования кинетики сушки. Для решения этой сравнительно простой задачи в системах автоматического управления применяют специализированное вычислительное устройство, что позволяет многократно решать задачи расчета кинетики сушки при изменении исходной влажности продукта.

Выводы

С помощью полученных дифференциальных уравнений можно проводить исследование кинетики процесса сушки яблок, что позволит сформировать основы методики расчета параметров технологической схемы и аппаратуры.

Список литературы

1. Киселева Т.Ф. Технология консервирования: учебное пособие/ Киселева Т.Ф., Помозова В.А., Гореньков Э.С.– Электрон. текстовые данные.– СПб.: Проспект Науки, 2011.– 416 с.
2. Процессы и аппараты пищевой технологии: учебник для студентов высших учебных заведений / Г.Д. Кавецкий, В.П. Касьяненко. –3-е изд., перераб. и доп.– М.: КолосС, 2008.– 591 с.

3. Остапчук Н. В. Основы математического моделирования процессов пищевых производств: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Высш. шк., – 2001. – 367 с.
4. Островский Г. М. Новый справочник химика и технолога. Процессы и аппараты химических технологий. Ч. II. – СПб.: НПО «Профессионал», 2006. – 916 с., ил.
5. Пчелинцева О. Н., Сарафанкина Е. А. Исследование сушки плодов черной смородины с использованием СВЧ-излучения – Молодежь. Наука. Инновации (Youth.Science.Innovation): Труды XI международной научно-практической интернет-конференции. 2015. – С.25–27.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DRYING APPLES

O. N. Pchelintseva

In the present work, using differential equations mathematical modeling of the kinetics of the drying process of apples. The dependences obtained will allow in the future when used in specialized computing devices to repeatedly solve the problem of calculating the kinetics of drying the moisture content of the product.

Keywords: modeling, apples, drying.

References

1. Kiseleva T. F. the Technology of preservation: a manual/ T. F. Kiseleva, V. A. Pomozova, Gorenkov E. S. – Electron. text data. – SPb.: Avenue Of Science, 2011. – 416 p.
2. Processes and devices of food technology: a textbook for students of higher educational institutions / D. G. Kavetsky, and V. P. Kasyanenko. – 3rd ed., Rev. and extra – M.: Colossus, 2008. – 591 p.
3. Ostapchuk N. V. Fundamentals of mathematical modeling of food production processes: Proc. allowance. – 2-e Izd., revised and enlarged extra – K.: Vyssh. Sch., – 2001. – 367 p.
4. Ostrovsky G. M. New reference book for chemist and technologist. The processes and apparatuses of chemical technology. Part II. – SPb.: NPO «Professional», 2006. – 916 p., ill.
5. Pchelintsev O. N., Sarafanchike E. A. Investigation of black currant fruit drying using microwave radiation – the Youth. Science. Innovation (Youth.Science.Innovation): proceedings of the XI international scientific-practical Internet-conference. 2015. – Pp. 25–27.